

# 模糊推理算法的研究进展

邓冠男

(东北电力大学 理学院, 吉林 吉林 132012)

**摘 要:** 随着模糊集的产生与发展, 模糊推理已经成为计算智能领域的重要组成部分。对于模糊推理的基本问题, 国内外学者进行了广泛研究, 提出多种模糊推理算法。为了深入理解各种模糊推理算法, 综述了模糊推理算法的研究进展, 重点分析 CRI 方法、模糊推理的全蕴涵三 I 算法、基于相似度的模糊推理算法以及真值流模糊推理的现状与进展, 希望能为模糊推理算法的研究提供引导作用。

**关 键 词:** 模糊集; 模糊推理; CRI 方法; 三 I 算法; 相似度

**中图分类号:** O 159

**文献标识码:** A

推理是人类智能的主要特征之一, 是实现人工智能的一种重要技术。随着模糊集的产生与发展, 模糊推理已经成为计算智能领域的重要组成部分。模糊推理旨在模拟人类的思维模式并建立不精确的推理方式, 按照规则和所给事实执行推理过程, 从而使人类可以基于一个不准确、不完善的知识库, 对于某一问题来给出一个近似的答案。目前, 模糊推理技术已经广泛应用于智能系统的许多领域, 如模糊控制系统、模糊专家系统、模糊神经网络系统以及模糊决策支持系统等等。

设  $A$  和  $A^*$  为论域  $X$  上的模糊集,  $B$  和  $B^*$  为论域  $Y$  上的模糊集。一般来说, 模糊推理以最简单的如下形式的模糊假言推理(Fuzzy Modus Ponens, 简称 FMP) 模型为基础

$$\begin{array}{c} \text{已知 } A \rightarrow B \\ \text{且给定 } A^* \\ \hline \text{求 } B^* \end{array} \quad (1)$$

与(1)式相对应, 有

$$\begin{array}{c} \text{已知 } A \rightarrow B \\ \text{且给定 } B^* \\ \hline \text{求 } A^* \end{array} \quad (2)$$

(2) 式表现的问题叫模糊拒取式(Fuzzy Modus Tollens, 简称 FMT)。

为了解决模糊推理问题, 国内外学者进行了广泛研究, 提出多种模糊推理方法, 比如 CRI 方法、三 I 算法、基于相似度的模糊推理算法等等, 其中有些方法已经得到相当广泛的应用。本文将对模糊推理算法的研究情况加以总结, 分析模糊推理算法的研究现状与研究进展。

## 1 模糊推理的 CRI 方法

针对 FMP 及 FMT 问题, 1973 年 Zadeh<sup>[1]</sup> 首先给出模糊推理理论中最基本的规则即模糊分离规则,

收稿日期: 2013-07-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(11226263, 11201057), 吉林省自然科学基金项目(201215165, 201302060065F)。

作者简介: 邓冠男(1979-), 男, 吉林省农安县人, 东北电力大学理学院副教授, 博士, 主要研究方向: 模糊信息处理。

随后 Mamdani<sup>[2]</sup> 等人又将其算法化, 形成如今广泛使用的合成推理规则 (Compositional Rule of Inference, 简称 CRI 方法)。

CRI 方法首先选择一个适当的蕴涵算子  $I$  将  $A \rightarrow B$  转化为  $X \times Y$  上的模糊关系  $R$

$$R(x, y) = I(A(x), B(y)) \quad (x, y) \in X \times Y,$$

然后将  $A^*$  与所得模糊关系  $R$  进行复合运算即得输出  $B^*$ ,

$$B^* = \bigvee_{x \in X} [A^*(x) \wedge I(A(x), B(y))].$$

CRI 方法中, 由  $A \rightarrow B$  构造模糊关系  $R$  这一过程 Zadeh 最初采用的蕴涵算子是

$$I_Z(x, y) = (1 - x) \vee (x \wedge y) \quad x, y \in [0, 1],$$

然而, 采用  $I_Z$  的 CRI 方法得到的结果有时与人们的直观并不相符。Zadeh<sup>[3]</sup>、Mamdani<sup>[2]</sup>、Mizumoto<sup>[4]</sup> 等均建议采用其他的方式来构造模糊关系  $R$ 。为此, Mamdani<sup>[2]</sup> 构造了蕴涵算子

$$I_M(x, y) = x \wedge y \quad x, y \in [0, 1],$$

这一蕴涵算子在模糊控制中得到了广泛应用; Mizumoto<sup>[4]</sup> 提出了多种方法, 分别表示为  $R_s$ 、 $R_g$ 、 $R_{sg}$ 、 $R_{gg}$ 、 $R_{gs}$ 、 $R_{ss}$ ; Baldwin<sup>[5]</sup> 提出的真值推理法中采用了 Lukasiewicz 蕴涵算子

$$I_{LK}(x, y) = 1 \wedge (1 - x + y) \quad x, y \in [0, 1],$$

目前, 由  $A \rightarrow B$  构造模糊关系  $R$  已经推广到一般的蕴涵算子, 侯健等<sup>[6]</sup> 总结了 300 多个蕴涵算子, 关于蕴涵算子的性质可以参考文献 [7]。

CRI 方法的第二步  $A^*$  与  $R$  的复合运算最初采用的是 “ $\vee - \wedge$ ” 这样一对算子, 后来人们将 “ $\wedge$ ” 推广到一般的三角模 “ $T$ ”, 比如 Mizumoto<sup>[8]</sup> 提出利用 Drastic 积<sup>[9]</sup> 和有界积<sup>[10]</sup> 来代替 “ $\wedge$ ”; Giurca 等<sup>[11]</sup> 在研究采用 Fodor 蕴涵的模糊推理时采用了两种不同于 “ $\wedge$ ” 的三角模; 徐蔚鸿<sup>[12]</sup> 构造了带参合成运算  $p^1 \circ p^2$  用来代替  $\vee - \wedge$  运算。关于三角模的选取问题, Trillas 等<sup>[13]</sup>、Dubois 等<sup>[14]</sup> 对此进行了深入的研究, 给出需满足的条件, 后来 Turksen 等<sup>[15]</sup> 对此问题做了详细的综述。

对 CRI 方法的改进, 除了对模糊关系的构造以及合成运算进行研究外, 也有对输入模糊集  $A^*$  进行适当的处理, 典型的例子是 Baldwin<sup>[5]</sup> 的真值推理法, 该方法构造 “ $x$  is  $A$ ” 相对于 “ $x$  is  $A^*$ ” 的语言真值  $\tau_{A/A^*}$ , 并将  $\tau_{A/A^*}$  代替原来 CRI 方法中的  $A^*$ , 进而得出推理结果。

在众多的研究者不断的改进下, 现在, 以 CRI 方法为主体的模糊推理不断吸收各种新思想与方法, 如今已经成为模糊系统理论中的一个重要研究内容。CRI 方法侧重于直接应用, 算法简便易行, 至今为止它仍是工业生产领域使用最为广泛的模糊推理方法。

## 2 模糊推理的全蕴涵三 I 算法

CRI 方法在模糊集理论中有着重要的地位及作用, 然而模糊推理远较经典逻辑学中的二值推理复杂得多。李洪兴<sup>[16]</sup> 指出基于 CRI 方法的模糊系统本质上是一种插值器, 因此在研究模糊系统的函数逼近问题时, 不可避免地出现 “规则爆炸” 的现象。从理论的角度分析, Zadeh 的 CRI 方法及其演变的推理机制也有许多值得推敲之处。王国俊<sup>[17]</sup> 指出 CRI 方法在求  $B^*$  时采用了复合运算, 这一步带有一定的随意性, 偏离了语义蕴涵的框架, 名为模糊推理, 但是实际上只使用一次与推理有关的蕴涵算子, 以至于它可以用传统的插值方法取代。

为了解决 CRI 方法的不足, 王国俊<sup>[17]</sup> 从逻辑语义蕴涵的角度提出了模糊推理的全蕴涵三 I 算法, 这一算法的核心是模糊推理的三 I 原则。

三 I 原则 (1) FMP 问题的解  $B^*$  是论域  $Y$  中使得下式取最大值的最小模糊集:

$$(A(x) \rightarrow B(y)) \rightarrow (A^*(x) \rightarrow B^*(y)) .$$

(2) FMT 问题的解  $A^*$  是论域  $X$  中使得上式取最大值的最大模糊集。

王国俊<sup>[17]</sup> 将三  $I$  原则进一步推广到一般情况, 提出  $\alpha$  - 三  $I$  原则。

$\alpha$  - 三  $I$  原则 (1) FMP 问题的  $\alpha$  - 解  $B^*$  是论域  $Y$  中使得下式成立的最小模糊集:

$$(A(x) \rightarrow B(y)) \rightarrow (A^*(x) \rightarrow B^*(y)) \geq \alpha ,$$

(2) FMT 问题的  $\alpha$  - 解  $A^*$  是论域  $X$  中使得上式成立的最大模糊集。

三  $I$  算法提出了来后不久, 宋士吉等<sup>[18]</sup> 提出模糊推理的反向三  $I$  算法以及  $\alpha$  - 反向三  $I$  支持算法, 给出反向三  $I$  支持原则以及  $\alpha$  - 反向三  $I$  支持原则。

反向三  $I$  支持原则 (1) FMP 问题的解  $B^*$  是论域  $Y$  中使得下式取最大值的最大模糊集:

$$(A^*(x) \rightarrow B^*(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow B(y)) .$$

(2) FMT 问题的解  $A^*$  是论域  $X$  中使得上式取最大值的最小模糊集。

$\alpha$  - 反向三  $I$  支持原则 (1) FMP 问题的  $\alpha$  - 解  $B^*$  是论域  $Y$  中使得下式成立的最大模糊集:

$$(A^*(x) \rightarrow B^*(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow B(y)) \geq \alpha .$$

(2) FMT 问题的  $\alpha$  - 解  $A^*$  是论域  $X$  中使得上式成立的最小模糊集。

目前, 主要从这样几个方面对三  $I$  算法进行研究。

(1) 研究采用不同蕴涵算子的三  $I$  算法。三  $I$  算法及反向三  $I$  算法最初提出时, 采用的是  $R_0$  蕴涵算子, 然而三  $I$  原则及反向三  $I$  支持原则中给出的是一般的蕴涵, 因此很多学者研究采用不同蕴涵算子时的三  $I$  算法及反向三  $I$  算法, 比如采用 Lukasiewicz 蕴涵算子<sup>[19-20]</sup>、IL 型蕴涵<sup>[21]</sup>、RL 型蕴涵<sup>[22]</sup>、R 蕴涵<sup>[23]</sup>以及其它一些常见蕴涵算子<sup>[24-26]</sup> 等等。

(2) 研究三  $I$  算法的相关理论, 如还原性<sup>[17, 18, 21]</sup>、连续性<sup>[27, 28]</sup>、逼近性<sup>[27]</sup>、响应能力<sup>[29, 30]</sup>、支持度理论<sup>[31, 32]</sup> 等等。

(3) 研究三  $I$  算法的改进算法, 例如, 针对三  $I$  原则及  $\alpha$  - 反向三  $I$  原则中取最小或最大模糊集缺乏理论依据的问题, 郭方芳等<sup>[33]</sup>、侯建等<sup>[34]</sup> 先后提出基于极大模糊熵的三  $I$  算法及反向三  $I$  算法; 王国俊等<sup>[35]</sup> 在模糊推理中提出“过半可信”原则, 并在此基础上构造了一种新型的三  $I$  算法。

自三  $I$  算法提出以来, 三  $I$  算法就受到广泛的关注, 然而, 这些研究均停留在理论层面, 迄今为止, 三  $I$  算法及其改进算法在实际控制中都还未见成功的运用。针对这一问题, 何映思等<sup>[36]</sup> 进行了研究, 发现三  $I$  算法虽然具有较为完善的逻辑语义, 但在一定条件下不能求解出所需要的模糊集, 而正是这个缺陷使得三  $I$  算法现在还不能应用到实际的控制中去。

### 3 基于相似度的模糊推理

在文献[37, 38] 中, Turksen 等观察到 CRI 方法的关系合成运算缺乏理论依据, 并且 CRI 方法由于不满足还原性, 导致会得到与实际不符的结论, 由此提出了一种基于相似度的模糊推理 (Approximate Analogical Reasoning Schema, 简称 AARS 方法)。后来, 为了解决医疗诊断中的问题, Chen<sup>[39, 40]</sup> 提出两种基于相似度的模糊推理方法, 分别为 MF 方法 (Matching Function Method) 以及 FT 方法 (Function T Method)。Yeung 等<sup>[41, 42]</sup> 提出三种基于相似度的模糊推理, 分别为 DS 方法 (Degree of Subsethood Method)、IC 方法 (Inclusion and Cardinality Method) 以及 EC 方法 (Equality and Cardinality Method)。

基于相似度的模糊推理的基本思想是根据  $A^*$  与  $A$  的相似度来调整  $B$ , 从而得到推理结果  $B^*$ , 具体来说首先计算  $A^*$  与  $A$  的相似度  $SM(A, A^*)$ , 之后对于含多条规则的模糊推理问题来说, 事先设定阈值

$\tau_0$ , 如果  $SM(A, A^*) \geq \tau_0$ , 则该条规则被采用, 然后使用修正函数作用于  $B$ , 从而得到推理结果  $B^*$ 。

相似度是度量两个数据相似程度的工具, 这里的相似度是用来度量两个模糊集相似程度, 由于模糊集的隶属度是用  $[0, 1]$  之间的数来表示, 因此, 传统的数值型数据的相似度公式都可以用来度量模糊集的相似度。下面介绍一下基于相似度的模糊推理的一些文献中构造的相似度公式。

(1) Turksen<sup>[37, 38]</sup> 给出一种相似度的计算公式  $S_{AARS}(A, A^*) = (1 + DM(A, A^*))^{-1}$ , 其中  $DM(A, A^*)$  为  $A$  与  $A^*$  的不相似性度量, 例如  $A$  与  $A^*$  的欧式距离、Hausdorff 距离等。另外, Turksen<sup>[37, 38]</sup> 还给出一种非距离的度量

$$DM(A, A^*) = 1 - \sup_{x \in X} \mu_{A \cap A^*}(x)。$$

(2) Chen<sup>[39, 40]</sup> 考虑到规则前件的各个命题对结果的重要性程度是不同的, 因此构造了一种加权的相似度计算方法

$$S_{FT}(A, A^*, W) = \sum_{i=1}^n \left[ T(a_i, a_i^*) * \frac{\omega_i}{\sum_{k=1}^n \omega_k} \right],$$

其中  $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle, A^* = \langle a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^* \rangle$  为输入前件模糊集,  $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  为权值向量,  $T(a_i, a_i^*) = 1 - |a_i - a_i^*|$ 。

另外, Chen<sup>[39, 40]</sup> 的 MF 方法中利用余弦构造了一种相似度; Yeung 等<sup>[41, 42]</sup> 在 DS 方法、IC 方法以及 EC 方法中分别构造了三种加权相似度; 针对 DS 方法的局限性, 哈明虎等<sup>[43]</sup>、沈君<sup>[44]</sup> 分别对 DS 方法的相似度进行改进, 使其具有更加合理的推理结果。汪德刚等<sup>[46]</sup> 将相似度推广到模糊相似度, 并建立模糊相似度推理算法。

关于修正函数的研究, 目前在文献中使用的多是基于 AARS 方法中给出的两种方法:

(1)  $B^* = \min\{1, B/S_{AARS}\}$  (more or less form)

(2)  $B^* = B * S_{AARS}$  (reduction form)

在 DS 方法中, Yeung 等<sup>[41]</sup> 在 more or less form 中增加了一个确定因子, 构造一种新的修正函数; 后来, Yeung 等<sup>[42]</sup> 又构造了增强的 more or less form 以及增强的 reduction form; 汪德刚等<sup>[45]</sup> 由于构造的是模糊相似度, 因此采用了模糊集的“ $\vee - \wedge$ ”运算代替修正函数。

除了上边的 Turksen 框架下的基于相似度的模糊推理之外, 还有其他一些基于相似度的模糊推理方法, 如陈图云等<sup>[46]</sup> 在 Mamdani 算法和真值限定推理方法的基础上构造了模糊集相似度限定推理方法; 何映思<sup>[47]</sup> 在 AARS 算法基础上提出了具有还原性的多重多维模糊推理算法。针对 FMT 问题, Mondal 等<sup>[48]</sup> 构造了三种基于相似度的反向模糊推理算法, 分别为 SIAR( Similarity-Based Inverse Approximate Reasoning)、INAR( Method Using Cylindrical Extension and Projection) 以及 EINAR( Extended INAR)。Raha 等<sup>[49]</sup> 结合模糊关系构造了一种新的基于相似度的模糊推理算法 SAR( Similarity-based Approximate Reasoning)。

## 4 真值流推理

真值流推理是 1989 年汪培庄<sup>[50]</sup> 提出的用以解释模糊推理机的推理机制的理论, 其思想是把蕴涵式  $A \rightarrow B$  的推理看作是真值沿着推理渠道流动的过程, 在这个蕴涵式中, 前件  $A$  是渠首, 后件  $B$  是渠尾。真值流推理针对具有多条规则的模糊推理问题进行研究, 并不像前面介绍的方法由简单的 FMP 及 FMT 问题入手研究模糊推理, 其基本步骤如下:

(1) 设已有知识确立了一个渠道集的基,它由有限个渠道构成:  $A_i \rightarrow B_i (i = 1, \dots, n)$ 。

(2) 将  $A^*$  与每个渠道的渠首  $A_i$  进行比较,计算贴近度  $\text{near}(A^*, A_i) = \lambda_i$ 。

(3) 真值沿  $A_i \rightarrow B_i$  传至渠尾,得  $V(B_i) = \lambda_i$ 。

(4) 将各渠尾  $B_i$  与真值  $\lambda_i$  按一定规律组合形成一个模糊判断

$$B^* = d(\lambda_1, B_1, \dots, \lambda_n, B_n)$$

在真值流推理中,如果给出不同的函数关系  $d$ ,则可以确定不同的推理模型,下面给出三种常用的函数关系<sup>[50]</sup>

$$d_1(v) = \bigvee_{i=1}^n (\lambda_i \wedge B_i(v)) ,$$

$$d_2(v) = \bigwedge_{i=1}^n (\lambda_i \wedge B_i(v)) ,$$

$$d_3(v) = \bigvee_{i=1}^n (\lambda_i B_i(v)) ,$$

文献[51]指出,若取  $\text{near}(A^*, A_i) = A^* \circ A_i = \bigvee A_i(u)$ ,则采用  $d_1$  的真值流推理等效于模糊控制中常用的 Mamdani 模型。

真值流推理方法简明、易于实现,同时算法具有合理的理论基础,能够与神经网络衔接起来,因此自提出以来受到广泛的关注。理论研究上,汪培庄等<sup>[50, 51, 52]</sup>对推理渠道的格结构、推理句的因素空间解释、从真值流的观点建立模糊推理理论、左向分析推理、兴奋度与动态推理等等进行的深入的研究,为真值流推理建立了一系列的基础理论。另外,胡建军等<sup>[53]</sup>将真值流推理引入模糊神经元模型中,构造了动态推理神经网络。王家奎等<sup>[54]</sup>利用真值流推理研究模糊控制器的设计,提出一种简易推理法。崔宝珍<sup>[55]</sup>利用内积构造真值,提出内积真值流推理,并研究多种情况下的模糊推理算法均为内积真值流推理。何映思等<sup>[56]</sup>对真值流推理算法在多种推理模式下的还原性进行了研究,并提出了一种带权重的真值流推理算法。

## 5 其它类型的模糊推理

目前,模糊推理算法层出不穷,除了前面介绍的几种类型的模糊推理算法外,还存在其他一些模糊推理算法,如特征展开推理法<sup>[57]</sup>、变权综合模糊推理<sup>[58]</sup>、基于中介逻辑的模糊推理<sup>[59]</sup>、简易插值模糊推理<sup>[60]</sup>、SIS 算法<sup>[61]</sup>、基于神经网络的模糊推理<sup>[62]</sup>、最优模糊推理方法<sup>[63]</sup>、基于规则的模糊似然推理<sup>[64]</sup>等等。

当然,本文所介绍的都是关于一般模糊集而言的,事实上,现在对区间值模糊集、直觉模糊集、二型模糊集上的模糊推理的研究也越来越吸引更多的关注。

## 参 考 文 献

- [1] L. A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1973, 3 (1): 28 - 44.
- [2] E. H. Mamdani. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic Synthesis [J]. IEEE Transactions on Computers, 1977, 26 (12): 1182 - 1191.
- [3] L. A. Zadeh. Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes [M]. New York: Academic Press, 1975.
- [4] M. Mizumoto, S. Fukami, K. Tanaka. Some methods of fuzzy reasoning [J]. in: M. M. Gupta et al. Advances in fuzzy set theory and application (North-Holland, Amsterdam), 1979, 117 - 136.
- [5] J. F. Baldwin. A new approach to approximate reasoning methods [J]. Fuzzy sets and systems, 1979, 2(4): 309 - 325.

- [6] 侯健 苑飞. 模糊推理方法及模糊系统的逼近性能[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 2009.
- [7] M. Baczyński, B. Jayaram. Fuzzy implications[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [8] M. Mizumoto. Fuzzy reasoning under new compositional rules of inference[J]. Kybernetes, 1985, 12(2): 107–117.
- [9] D. Dubois, H. Prade. A class of fuzzy measures based on triangular norms[J]. International Journal of General Systems, 1982, 8(1): 43–61.
- [10] R. Giles. Lukasiewicz logic and fuzzy theory[J]. International Journal of Man Machine Studies, 1976, 8(3): 313–327.
- [11] A. Giurca, J. Iancu. Approximate Reasoning Using Fodor's Implication[C]. International Conference 9th fuzzy Days in Dortmund, Germany, Sept. 18–20, 2006. Proceedings: Computational Intelligence, Theory and Applications, 2006, 38: 513–520.
- [12] 徐蔚鸿. 模糊智能系统中模糊推理研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2004.
- [13] E. Trillas, J. Valverde. On mode and implication in approximate reasoning[J]. in: W. Bandler, M. M. Gupta, A. Kandel, J. B. Kiszka. Approximate Reasoning in Expert Systems, Elsevier Science Publishers, North-Holland, Amsterdam, 1985: 157–166.
- [14] D. Dubois, H. Prade. Fuzzy logics and the generalized modus ponens revisited[J]. Cybernetics and Systems, 1984, 15(3/4): 293–331.
- [15] I. B. Turksen, K. Demirdi. Rule and operation decomposition in CRI[J]. in: P. P. Wang (Ed.), Advances in Fuzzy Theory and Technology I, Bookwrights Press, Durham, North Carolina, 1993: 219–256.
- [16] 李洪兴. 模糊控制的插值机理[J]. 中国科学: E 辑, 1998, 28(3): 259–267.
- [17] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J]. 中国科学: E 辑, 1999, 29(1): 43–53.
- [18] 宋士吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 算法[J]. 中国科学: E 辑, 2002, 32(2): 230–246.
- [19] 秦克云, 裴峥. 基于 Lukasiewicz 蕴涵算子的反向三 I 算法[J]. 模糊系统与数学, 2005, 19(2): 1–5.
- [20] 高小军, 李俊民, 赵东元. RL 型三 I 算法[J]. 西安电子科技大学学报: 自然科学版, 2002, 29(3): 379–381.
- [21] 罗清君, 王国俊. IL 型三 I 算法及其还原性[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版, 2006, 34(3): 9–13.
- [22] 苏忍锁, 王国俊. RL 型蕴涵与 Fuzzy 推理的三 I 算法[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版, 2004, 32(3): 7–11.
- [23] 徐章艳, 冯嘉礼. 基于 R 蕴涵算子的  $\alpha$ -三 I 算法[J]. 计算机应用与软件, 2004, 21(1): 10–11.
- [24] 彭家寅, 侯健, 李洪兴. 基于某些常见蕴涵算子的反向三 I 算法[J]. 自然科学进展, 2005, 15(4): 404–410.
- [25] 潘海玉, 裴道武, 潘俊任. 基于一族蕴涵算子的三 I 算法[J]. 浙江理工大学学报, 2008, 25(4): 466–469.
- [26] 王作真, 张兴芳, 阚婷. 基于剩余蕴涵算子族  $L_p$  的三 I 支持算法[J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(1): 19–23.
- [27] 潘海玉, 裴道武, 黄阿敏. 模糊推理三 I 算法的连续性和逼近性[J]. 计算机科学, 2008, 35(12): 158–162.
- [28] 曾水玲, 杨静宇, 徐蔚鸿. 反向三 I 算法的连续性和误差传播[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(2): 273–278.
- [29] 侯健, 尤飞, 李洪兴. 由三 I 算法构造的一些模糊控制器及其响应能力[J]. 自然科学进展, 2005, 15(1): 29–37.
- [30] 胡凯, 汪德刚, 王加银. 基于不同蕴涵算子的三 I 算法构造的模糊控制器及其响应能力[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2009, 45(4): 344–349.
- [31] 王琼, 何一农, 宋振明. 基于剩余蕴涵的模糊三 I 方法的支持度[J]. 西南交通大学学报, 2004, 39(4): 550–553.
- [32] 孙长银, 宋士吉, 费树岷, 冯纯伯. 模糊推理的三 I 合法的 RL 型支持度分析[J]. 应用数学, 2001, 14(1): 126–130.
- [33] 郭方芳, 陈图云, 夏尊铨. 基于极大模糊熵原理的模糊推理三 I 算法[J]. 模糊系统与数学, 2003, 17(4): 55–59.
- [34] 侯健, 彭家寅, 张宇卓, 张诚一. 基于极大模糊熵原理的模糊推理反向三 I 算法[J]. 计算机研究与发展, 2006, 43(7): 1180–1185.
- [35] 王国俊, 宋庆燕. 一种新型的三 I 算法及其逻辑基础[J]. 自然科学进展, 2003, 13(6): 575–581.
- [36] 何映思, 全海金. 全蕴涵三 I 算法的推理结果研究[J]. 计算机科学, 2012, 39(10): 248–250.
- [37] I. B. Turksen, Z. Zhong. An approximate analogical reasoning approach based on similarity measures[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 1988, 18(6): 1049–1056.
- [38] I. B. Turksen, Z. Zhong. An approximate analogical reasoning scheme based on similarity measures and interval valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 34(3): 323–346.
- [39] S. M. Chen. A new approach to handling fuzzy decision-making problems[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 1988, 18(12): 1012–1016.
- [40] S. M. Chen. A weighted fuzzy reasoning algorithm for medical diagnosis[J]. Decision Support Systems, 1994, 11(1): 37–43.
- [41] D. S. Yeung, E. C. C. Tsang. Improved fuzzy knowledge representation and rule evaluation using fuzzy Petri nets and degree of subthood[J]. Intell. Syst., 1994, 9(12): 1083–1100.
- [42] D. S. Yeung, E. C. C. Tsang. A Comparative Study on Similarity-Based Fuzzy Reasoning Methods[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 1997, 27(2): 216–227.

- [43] 哈明虎,李海军. 两种改进的相似度及模糊推理方法[J]. 计算机工程与应用 2005 41(35):31-34.
- [44] 沈君. 一种新的相似性度量在加权模糊推理中的应用[J]. 海南大学学报:自然科学版 2010 28(3):237-240.
- [45] 汪德刚,孟艳平,宋雯彦,李洪兴. 模糊相似度推理算法及其构造的模糊系统逼近性能的分析[J]. 工程数学学报 2009 26(3):423-430.
- [46] 陈图云,孟艳平. 模糊集相似度限定推理方法[J]. 工程数学学报 2005 22(2):346-348.
- [47] 何映思,全海金,邓辉文. 具有还原性的多重多维模糊推理算法[J]. 计算机科学 2007 34(4):145-148.
- [48] B. Mondal, S. Raha. Similarity-Based Inverse Approximate Reasoning[J]. IEEE Transactions on fuzzy systems 2011 19(6):1058-1071.
- [49] S. Raha, N. R. Pal, K. S. Ray. Similarity-Based Approximate Reasoning: Methodology and Application[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics 2002 32(4):541-547.
- [50] 汪培庄,张洪敏. 真值流推理及其动态分析[J]. 北京师范大学学报 1989(1):1-12.
- [51] 汪培庄,张洪敏,白明,张民. Fuzzy 推理机与真值流推理[J]. 模糊系统与数学 1992 6(2):1-9.
- [52] P. Z. Wang, X. H. Zhang, H. C. Lui, H. M. Zhang, W. Xu. Mathematical theory of truth-valued flow inference [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995 72(2):221-238.
- [53] 胡建军,徐扬. 动态模糊推理神经网络的结构分析[J]. 模糊系统与数学 1994 8(1):62-73.
- [54] 王家奎,王戈. 真值流推理与模糊控制[J]. 大连海事大学学报 1995 21(2):99-104.
- [55] 崔宝珍. 基于内积真值流的模糊推理[J]. 甘肃高师学报 2000 5(2):18-22.
- [56] 何映思,邓辉文. 一种带权重的真值流推理算法[J]. 计算机科学 2009 36(12):223-226.
- [57] F. L. Xiong, S. W. Li. An algorithm of characteristic expansion for fuzzy reasoning based on triple I method[C]. The 4th IFAC/CIGR Workshop on AI in Agriculture, Hungary 2001.
- [58] 张宇卓,李宇成,李洪兴. 模糊推理的变权综合算法及其构造的模糊系统响应能力分析[J]. 模糊系统与数学 2006 20(6):66-72.
- [59] 张丽珍,潘正华. 基于中介逻辑的模糊推理算法[J]. 计算机工程与科学 2010 32(9):69-72.
- [60] 赵海良. 简易插值模糊推理方法[J]. 模糊系统与数学 2010 24(6):12-20.
- [61] 邹祥福,裴道武. 模糊推理的 SIS 算法[J]. 模糊系统与数学 2010 24(6):1-7.
- [62] 陈文伟,黄金才. 基于神经网络的模糊推理[J]. 模糊系统与数学 1996 10(4):26-30.
- [63] K. Y. Cai, L. Zhang. Fuzzy Reasoning as a Control Problem[J]. IEEE Transactions on fuzzy systems 2008 16(3):600-614.
- [64] 房育栋,余英林. 基于规则的模糊似然推理[J]. 控制理论与应用 1996 13(2):182-190.
- [65] 邓冠男. 聚类分析中的相似度研究[J]. 东北电力大学学报 2013 33(1/2):156-161.
- [66] 宋人杰,刘娟. 基于模糊聚类与 RBF 网络集成分类器的验证码识别[J]. 东北电力大学学报 2012 32(4):40-43.

## Advances in Fuzzy Reasoning Algorithm

DENG Guan-nan

( Science College, Northeast Dianli University, Jilin Jilin 132012)

**Abstract:** With the development of fuzzy sets, fuzzy reasoning has become an important field of computational intelligence. For the basic problem of fuzzy reasoning, a lot of studies have been done, and many fuzzy reasoning algorithms have been proposed. To understand these algorithms, the advances of fuzzy reasoning algorithms, such as CRI method, the full implication triple I method, the fuzzy reasoning methods based on the similarity and the truth-valued flow method are reviewed. Its purpose is to provide the guidance on the further study of fuzzy reasoning.

**Key words:** Fuzzy sets; Fuzzy reasoning; CRI method; Triple I method; Similarity